

ΜΑΥ611: Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι (2024-25) - Ιανουάριος 2026

Ημερομηνία: 15/01/2026

Διάρκεια: 3 ώρες

1. α) Βρείτε όλες τις λύσεις $z \in \mathbb{C}$ της εξίσωσης $(\overline{z+i})^7 = \sqrt{3} - i$.
β) Προσδιορίστε την εικόνα $f(S)$ του συνόλου $S = \{z \in \mathbb{C}^* : |z-i| \leq |z-3|\}$ κάτω από την απεικόνιση $f(z) = 1/z$. Σχεδιάστε πρόχειρα τα $S, f(S)$. (1 + 1 μον.)

2. α) Έστω $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ και $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $u = \operatorname{Re}(f), v = \operatorname{Im}(f)$. Δείξτε ότι αν η f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη στο σημείο $z_0 = x_0 + iy_0$ τότε το διανυσματικό πεδίο $F = (u, v)$ είναι διαφορίσιμο στο σημείο (x_0, y_0) και οι u, v ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann.
β) Βρείτε όλα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία η συνάρτηση

$$f(x+iy) = \begin{cases} \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4}, & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

είναι μιγαδικά διαφορίσιμη. (1 + 1 μον.)

3. α) Δείξτε ότι $\operatorname{Log}(1+w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} w^n$, για κάθε $w \in D(0, 1)$ και έπειτα γράψτε σαν σειρά την έκφραση $\operatorname{Log}(1+w) - \operatorname{Log}(1-w)$, για $w \in D(0, 1)$.

- β) Βρείτε το δίσκο σύγκλισης και υπολογίστε το άθροισμα της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i-2z)^{2n}}{2n+1}$. (1 + 1 μον.)

4. α) Σχεδιάστε πρόχειρα την προσανατολισμένη καμπύλη που παραμετρικοποιείται από τη συνάρτηση $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ με $\gamma(t) = 1 - i + 3e^{-it}$, και έπειτα υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{e^{\frac{\pi z}{2}}}{z^2 + 1} dz.$$

- β) Αν η f είναι ολόμορφη στο $D(0, R)$ για κάποιο $R > 1$, δείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) dt = \frac{\pi}{2}(2f(0) + f'(0)).$$

(Υπόδειξη: $\cos w = \frac{e^{-iw} + e^{iw}}{2}$.) (1 + 1 μον.)

5. α) Έστω f ακέραια, μη-σταθερή συνάρτηση. Δείξτε ότι το σύνολο $f(\mathbb{C})$ είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$.

- β) Έστω $f : D(0, 2) \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη με $f\left(\frac{1}{n} + i\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n^2}{n+i(1+2n^2)}$. Υπολογίστε το $f(i)$. (1 + 1 μον.)

6. Βρείτε και ταξινομήστε τις μεμονωμένες ανωμαλίες της συνάρτησης $f(z) = \frac{1 - \cos z}{\sin^2 z}$. (1 μον.)

Αιτιολογείτε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Καλή επιτυχία!